LA ESTIMACIÓN DEL MODELO DE "FUNCIÓN DISTANCIA": MEDICIÓN DE LA EFICIENCIA Y CÁLCULO DE ELASTICIDADES

Moreno Sáez, Alfredo
eciop24@sis.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid

Trillo del Pozo, David
trillo@poseidon.fcjs.urjc.es
Universidad Rey Juan Carlos

1. INTRODUCCIÓN:

La noción de distancia de Shepard (1970) ha servido de base para el diseño de las diferentes técnicas de frontera construidas a partir de múltiples inputs y outputs. El análisis DEA ha sido la técnica más utilizada, aunque a partir del trabajo de Färe y otros (1993) se ha introducido una transformación de los modelos paramétricos destinada a incorporar múltiples inputs y outputs en un proceso de producción conjunta. Definiendo una función de producción homogénea es posible transformar la especificación del modelo y estimar la frontera. Las eficiencias se calculan mediante la esperanza matemática de la producción estimada condicionada al nivel de input de la observación correspondiente, dividido entre la esperanza matemática de la producción estimada o en la frontera condicionada a idéntico nivel de input.

Coelli y Perelman (1996) adaptan el modelo de la función distancia para las estimaciones de tipo estocástico. En este modelo se divide el término de error en una parte representativa de las eficiencias, suponiendo una distribución truncada en cero, y otra que recoge el término de error no explicado al que se le asigna la distribución de probabilidad habitual. Debido a que el error se descompone en dos partes es preciso estimar el término de ineficiencia condicionado al error total.

En este trabajo planteamos la utilidad del cálculo de las derivadas de la función distancia de cara a obtener la interpretación de las productividades marginales a partir de una especificación Cobb-Douglas y Translog. El cociente de las productividades marginales sirve para estudiar la relación marginal de sustitución técnica entre inputs. Como en la estimación se introducen múltiples outputs, es posible calcular la sensibilidad de cualquier producto respecto a otro de los introducidos en la función, manteniendo constante el nivel de inputs, lo que se conoce como la relación marginal de transformación entre outputs.

2. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DISTANCIA

En el modelo desarrollado por Färe y otros (1993) se define una función de outputs en relación con una función de inputs, ambas de tipo translogarítmico, siendo el término de error la desviación o distancia ($\ln(D_{0i})$) a la frontera conjunta para todas las variables empleadas (Modelos determinísticos). En los modelos estocásticos se añade la hipótesis de que la desviación a la frontera no es únicamente debida a las ineficiencias.

La expresión propuesta de la función translog distancia para el supuesto de M output y K inputs es:

$$\ln D_{0i} = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_{mn} \ln y_{mi} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} \alpha_{mn} \ln y_{mi} \ln y_{ni} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \ln x_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ki} \ln x_{ki} \ln x_{li} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} \chi_{km} \ln x_{ki} \ln y_{mi}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \qquad \text{(ec. 1)}$$

Donde Y_i es la producción del input “m” y X_i la cantidad del recurso “k” para la unidad productiva “i”. α, β, χ son los parámetros a estimar y ln (D_{0i}) es el término de ineficiencia de la unidad evaluada. Adicionalmente se exigen dos restricciones de homogeneidad:

$$\sum_{m=1}^{M} \alpha_m = 1$$

$$\sum_{m=1}^{M} \alpha_m = 0, \; m = 1, 2, ..., M. \qquad y \; \sum_{m=1}^{M} \chi_{km} = 0,$$

y una restricción de simetría de los parámetros:

$\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$ m, n = 1, 2, … , M. y $\beta_{kl} = \beta_{lk}$ k, l = 1, 2, ... , K

Que es un desarrollo de Taylor para una función homogénea que cumple que $D_0(x,g.y) = g.D_0(x, y)$, para un $g > 0$, lo cual refleja la idea de la función distancia o expansión equiproporcional, según g, de los outputs de la unidad evaluada. La igualdad presentada recoge la característica básica de cualquier función homogénea.

El valor de los parámetros desconocidos en la función translog se puede obtener a través de un programa lineal de maximización, idéntico al propuesto por Aigner y Chu[1], o bien mediante técnicas de regresión. Jondrow y otros (1977) recogen la expresión funcional para proponer un método de cálculo de las ineficiencias a través de la propia estimación econométrica.

En concreto, si se cumple que $D_0(x, g.y) = g.D_0(x, y)$ para un $g > 0$, entonces es posible escoger arbitrariamente uno de los M outputs y considerar $g = 1/y_M$. Entonces $D_0(x, y/y_M) = D_0(x, y)/y_M$.

En el trabajo hacemos una transformación sobre la propuesta de Färe y otros (1993) para que la interpretación de los parámetros asociados a los inputs sea directa (positiva).

Con este cambio únicamente se altera la restricción de homogeneidad, puesto que ahora la función será homogénea de grado –1. Escogiendo uno de los outputs como referencia puede transformarse la "función distancia". La especificación funcional del modelo quedará como sigue:

---

[1] $\max \sum_{i=1}^{N} \ln D_{0i}$ s.a. $\ln D_{0i} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Junto con las restricciones de homogeneidad y simetría anteriormente descritas. Tal como se plantea el programa, el máximo valor del logaritmo es cero, que será el exponente al que elevada la variable original dará de resultado igual a uno, es decir el 100% de eficiencia. Se cumplen por tanto los supuestos descritos en el primer capítulo para las funciones distancia, donde $0<D_0\leq 1$ ó $-\infty<\ln(D_0)\leq 0$. En el programa de Aigner y Chu la variable objeto de optimización era $U_i = \ln(D_{0i})$. Sin embargo, El programa era de minimización porque el término era $- U_i$. En programación se comprueba que $\max U_i = \min - U_i$.

$$-\ln(D_{0i}/y_{Mi}) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}\ln\left(\frac{y_{mi}}{y_{Mi}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M-1}\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}\ln\left(\frac{y_{mi}}{y_{Mi}}\right)\ln\left(\frac{y_{mi}}{y_{Mi}}\right) + \sum_{k=1}^{K}\beta_k \ln x_{ki} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\beta_{ki}\ln x_{ki}\ln x_{li} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\ln x_{ki}\ln\left(\frac{y_{mi}}{y_{Mi}}\right) \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dado que para m = M, se cumple:

$\ln\left(\frac{y_{Mi}}{y_{Mi}}\right) = \ln(1) = 0$, tenemos que todos los términos en que m = M desaparecen de la expresión.

Puede demostrarse que la estimación de este modelo sin considerar ninguna restricción sobre los parámetros es equivalente a la estimación del Modelo 1, incluyendo las restricciones sobre los parámetros.

De esta forma, y aplicando las propiedad de los logaritmos, tendremos que:

$$-\ln(D_{0i}) + \ln(y_{Mi}) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}\left[\ln(y_{mi}) - \ln(y_{Mi})\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M-1}\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}\left[\ln(y_{mi}) - \ln(y_{Mi})\right]^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\beta_k \ln x_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\beta_{ki}\ln x_{ki}\ln x_{li} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\ln x_{ki}\left[\ln(y_{mi}) - \ln(y_{Mi})\right] \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Desarrollando los cuadrados de la expresión, y operando, teniendo en cuenta que del valor $\ln(y_{Mi})$ no variará con el subíndice que representa el resto de variables del modelo, tendremos:

$$-\mathrm{Ln}(D_{i0}) = \alpha_0 - \ln(y_{Mi}) + \sum_{m=1}^{M-1}\alpha_m \ln(y_{mi}) + \ln(y_{Mi})\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_m +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mm}\left[\ln(y_{mi})\right]^2+\left[\ln(y_{Mi})\right]^2\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mm}-2\ln(y_{Mi})\sum_{m=1}^{M-1}\ln\left(y_{mi}\right)+\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mm}\ln\left(y_{mi}\right)\ln\left(y_{ni}\right)-$$

$$-\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\left[\ln\left(y_{mi}\right)-\ln\left(y_{Mi}\right)\right]\left[\ln\left(y_{ni}\right)-\ln\left(y_{Mi}\right)\right]\Bigg]+\sum_{k=1}^{K}\beta_k\ln x_{ki}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\beta_{ki}\ln x_{ki}\ln x_{li}+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\ln x_{ki}\ln\left(y_{mi}\right)-\ln(y_{Mi})\sum_{k=1}^{K}\ln x_{ki}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\quad i=1,2,\ldots,N.$$

Donde, teniendo en cuenta que se cumple que:

$$\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\left[\ln\left(y_{mi}\right)-\ln\left(y_{Mi}\right)\right]\left[\ln\left(y_{ni}\right)-\ln\left(y_{Mi}\right)\right]=$$

$$\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\ln\left(y_{mi}\right)\ln\left(y_{Mi}\right)-\ln\left(y_{Mi}\right)\sum_{m=1}^{M-1}\ln\left(y_{mi}\right)\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}-\ln\left(y_{Mi}\right)\sum_{n=1}^{M-1}\ln\left(y_{ni}\right)\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}+$$

$$+\left[\ln\left(y_{Mi}\right)\right]^2\sum_{n=1}^{M-1}\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mn}$$

Este modelo podrá expresarse de la siguiente forma:

$$-\mathrm{Ln}(D_{i0})=\alpha_0+\ln(y_{Mi})\left[-1-\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_m\right]+\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_m\ln\left(y_{mi}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\left[\ln(y_{Mi})\right]^2\left[\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mm}+\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\right]+\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mm}\left[\ln\left(y_{mi}\right)\right]^2+\ln(y_{Mi})\sum_{m=1}^{M-1}\ln\left(y_{mi}\right)\left[-\alpha_{mm}-\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}\ln\left(y_{mi}\right)\ln\left(y_{ni}\right)\Big]+\sum_{k=1}^{K}\beta_k\ln x_{ki}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\beta_{kl}\ln x_{ki}\ln x_{li}+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\ln x_{ki}\ln\left(y_{mi}\right)-\ln(y_{Mi})\sum_{k=1}^{K}\ln x_{ki}\sum_{m=1}^{M-1}\chi_{km}\quad i = 1, 2, \dots , N.$$

Por consiguiente, tenemos la misma expresión del modelo 1, donde los parámetros son los siguientes:

$$\alpha_m^* = \alpha_m \quad \forall\ m = 0, 1, 2, ..., M\text{-}1.$$

$$\alpha_M^* = -1-\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_m$$

$$\beta_k^* = \beta_k \quad k = 1, 2, ... , K$$

$$\alpha_{mm}^* = \frac{\alpha_{mm}}{2} \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M\text{-}1.$$

$$\alpha_{MM}^* = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M-1}\alpha_{mm}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn}$$

$$\alpha_{Mm}^* + \alpha_{mM}^* = -\alpha_{mm}-\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn} \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M \quad n \neq m.$$

$$\alpha_{mn}^* + \alpha_{nm}^* = \alpha_{mn} \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M\text{-}1 \quad \forall\ n = 1, 2, ..., M\text{-}1 \quad n \neq m$$

Con lo que:

$$\alpha_{Mm}^* = \alpha_{mM}^* = -\frac{1}{2}\alpha_{mm}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M-1}\alpha_{mn} \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M \quad n \neq m.$$

$$\alpha_{mn}^* = \alpha_{nm}^* = \frac{\alpha_{mn}}{2} \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M\text{-}1 \quad \forall\ n = 1, 2, ..., M\text{-}1 \quad n \neq m.$$

$$\beta_{kl}^* = \beta_{kl} \quad \forall\ k = 1, 2, ... , K \quad \forall\ l = 1, 2, ... , K$$

$$\chi_{km}^* = \chi_{km} \quad \forall\ k = 1, 2, ..., K \quad \forall\ m = 1, 2, ..., M\text{-}1.$$

$$\chi^*_{kM} = -\sum_{m=1}^{M-1} \chi^*_{km} \text{ , k = 1, 2, ..., K.}$$

Por consiguiente, se cumplirá que:

$$\sum_{m=1}^{M} \alpha^*_m = \sum_{m=1}^{M-1} \alpha^*_m + \alpha^*_M = -1 - \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m + \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m = -1$$

Respecto al valor que tomarán $\sum_{n=1}^{M} \alpha^*_{mn}$, existen dos posibilidades:

a) Caso en que $m \neq M$:

$$\sum_{n=1}^{M} \alpha^*_{mn} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{M-1} \alpha^*_{mn} + \alpha^*_{mM} + \alpha^*_{mm} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{M-1} \frac{\alpha_{mn}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\alpha_{mm} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M-1} \alpha_{mn} \right) + \frac{1}{2}\alpha_{mm} = 0 \quad \forall \ m = 1, 2,$$

..., M

b) Caso en que m = M :

$$\sum_{n=1}^{M} \alpha^*_{Mn} = \sum_{n=1}^{M-1} \alpha^*_{Mn} + \alpha^*_{MM} = \sum_{n=1}^{M-1} \left(-\frac{1}{2}\alpha_{mm} - \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mn} \right) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M-1} \alpha_{mm} + \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mn} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mm} - \sum_{n=1}^{M-1}\sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mn} + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mm} + \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{2}\alpha_{mn} = 0$$

Por último, tendremos que:

$$\sum_{m=1}^{M} \chi^*_{km} = \sum_{m=1}^{M-1} \chi^*_{km} + \chi^*_{kM} = \sum_{m=1}^{M-1} \chi_{km} + \left(-\sum_{m=1}^{M-1} \chi_{km} \right) = 0 \quad \forall \text{ k = 1, 2, ..., K.}$$

3. ELASTICIDADES EN LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS

El modelo de la función distancia tiene su base en la propuesta de estimación de Battese y Coelli (1992), en donde se explica una variable de producción a través de una relación funcional de tipo translog cuya especificación es:

$$\ln(y_i) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \ln x_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} \beta_{ki} \ln x_{ki} \ln x_{li} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} \beta_{ki} \ln x_{ki} \ln x_{li} + Ln(D_0)$$

En el caso de la función Cobb-Douglas se indicó que el valor de los parámetros puede interpretarse como elasticidades (la derivada de la variable a dependiente respecto a cualquier input) y éstas son fijas para todas las observaciones muestrales. Pueden interpretarse como el promedio de la sensibilidad que muestra la producción a esas variables. En el caso de la especificación translogarítmica las derivadas son variables (una por observación), lo que obliga a su cálculo.

Diferenciando respecto a la variable de output e input x_p respectivamente, obtenemos que la elasticidad de la primera respecto a la segunda será:

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx_p}{x_p}} = \beta_p + \sum_{k=1}^{K} \beta_{pk} \ln(x_k) \qquad \forall\ p = 1, 2, \ldots, K$$

En particular para tres inputs, tendremos la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx_p}{x_p}} = \beta_p^* + \beta_{p1}^* \ln(x_1) + \beta_{p2}^* \ln(x_2) + \beta_{p3}^* \ln(x_3) \qquad \forall\ p = 1, 2, 3$$

El modelo que aplica la teoría de la función distancia (Coelli y Perelman (1996)), explicado anteriormente, incorpora varios outputs dentro de la estimación. Una vez estimado el modelo, resulta de gran interés determinar el grado de influencia de cada una de las variables de input sobre las de output, y entre las de input entre sí. Diferenciando en el Modelo 1 respecto a la variable de Output y de Input correspondiente se obtiene que la elasticidad de la variable y_s respecto a la variable x_n:

$$\frac{\frac{dy_s}{y_s}}{\frac{dx_p}{x_p}} = -\frac{\beta_p^* + \sum_{k=1}^{K} \beta_{pk}^* \ln(x_k) + \sum_{m=1}^{M} \chi_{pm}^* \ln(y_m)}{\alpha_s^* + \sum_{m=1}^{M} \alpha_{sm}^* \ln(y_m) + \sum_{k=1}^{K} \chi_{ks}^* \ln(x_k)} \quad \forall\ m = 1,2,...,M \quad \forall\ k = 1,2,...,K$$

Mientras que, para determinar el grado de influencia de una variable de Output cualquiera (y_s) sobre la variable de Output de referencia (y_M), diferenciaremos el Modelo 1 respecto a las dos variables de mencionadas, obteniendo que la elasticidad de la variable y_M respecto a la variable y_s es igual a:

$$\frac{\frac{dy_M}{y_M}}{\frac{dy_s}{y_s}} = -\frac{\alpha_s^* + \sum_{m=1}^{M} \alpha_{sm}^* \ln(y_m) + \sum_{k=1}^{K} \chi_{ks}^* \ln(x_k)}{\alpha_M^* + \sum_{m=1}^{M} \alpha_{Mm}^* \ln(y_m) + \sum_{k=1}^{K} \chi_{kM}^* \ln(x_k)} \quad \forall\ m = 1,2,...,M$$

4. FUNCIÓN DISTANCIA, ELASTICIDADES Y TRANSFORMACIÓN DE LOS PARÁMETROS ESTIMADOS PARA 3 OUTPUTS Y 2 INPUTS

4.1. Función translog:

Como caso particular del Modelo de la función distancia de carácter estocástico describimos el caso de una estimación con tres outputs y dos inputs, de modo que se considera el primero de aquellos ($\ln(y_1)$) como variable de referencia. El modelo obtenido a partir de la estimación por máxima verosimilitud sin restricciones que se propone en el presente epígrafe, es el siguiente:

$$0 = \alpha_0^* + \alpha_1^* \ln(y_1) + \alpha_2^* \ln(y_2) + \alpha_3^* \ln(y_3) + \frac{1}{2}\Big[\alpha_{11}^* [\ln(y_1)]^2 + \alpha_{22}^* [\ln(y_2)]^2 + \alpha_{33}^* [\ln(y_3)]^2 +$$

$$+(\alpha_{12}^* + \alpha_{21}^*)[\ln(y_1)\ln(y_2)] + (\alpha_{13}^* + \alpha_{31}^*)[\ln(y_1)\ln(y_3)] + (\alpha_{23}^* + \alpha_{32}^*)[\ln(y_2)\ln(y_3)]\Big] +$$

$$+\beta_1^* \ln(x_1) + \beta_2^* \ln(x_2) + \frac{1}{2}\Big[\beta_{11}^* [\ln(x_1)]^2 + \beta_{22}^* [\ln(x_2)]^2 + \beta_{12}^* [\ln(x_1)\ln(x_2)]\Big] + \chi_{11}^* \ln(x_1)\ln(y_1) +$$

$$+\chi_{12}^* \ln(x_1)\ln(y_2) + \chi_{13}^* \ln(x_1)\ln(y_3) + \chi_{21}^* \ln(x_2)\ln(y_1) + \chi_{22}^* \ln(x_2)\ln(y_2) + \chi_{23}^* \ln(x_2)\ln(y_3) + \ln(D_0)$$

Donde para estimar el modelo con las restricciones, se estimará sin restricciones el siguiente modelo:

$$-\ln(y_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \alpha_2 \ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right) + \frac{1}{2}\alpha_{11} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \frac{1}{2}\alpha_{22} \ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right)\ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right) +$$

$$+\alpha_{12} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right) + \beta_1 \ln(x_1) + \beta_2 \ln(x_2) + \frac{1}{2}\beta_{11}[\ln(x_1)]^2 + \frac{1}{2}\beta_{22}[\ln(x_2)]^2 +$$

$$+\beta_{12}\ln(x_1)\ln(x_2)+\chi_{11}\ln(x_1)\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+\chi_{12}\ln(x_1)\ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right)+\chi_{21}\ln(x_2)\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+\chi_{22}\ln(x_2)\ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right)+\ln(D_0)$$

Desarrollando los logaritmos:

$$0=\alpha_0+\ln(y_1)\alpha_1\left[\ln(y_2)-\ln(y_1)\right]+\alpha_2\left[\ln(y_3)-\ln(y_1)\right]+\frac{1}{2}\alpha_{11}\left[\ln(y_2)-\ln(y_1)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{22}\left[\ln(y_3)-\ln(y_1)\right]^2+\alpha_{12}\left[\ln(y_2)-\ln(y_1)\right]\left[\ln(y_3)-\ln(y_1)\right]+$$

$$+\beta_1\ln(x_1)+\beta_2\ln(x_2)+\frac{1}{2}\beta_{11}\left[\ln(x_1)\right]^2+\frac{1}{2}\beta_{22}\left[\ln(x_2)\right]^2+\beta_{12}\ln(x_1)\ln(x_2)+$$

$$+\chi_{11}\ln(x_1)\left[\ln(y_2)-\ln(y_1)\right]+\chi_{12}\ln(x_1)\left[\ln(y_3)-\ln(y_1)\right]+\chi_{21}\ln(x_2)\left[\ln(y_2)-\ln(y_1)\right]+$$

$$+\chi_{22}\ln(x_2)\left[\ln(y_3)-\ln(y_1)\right]+\ln(D_0)$$

Donde:

$$\alpha_0^*=\alpha_0$$

$$\alpha_1^*=-1-\alpha_1-\alpha_2$$

$$\alpha_2^*=\alpha_1$$

$$\alpha_3^*=\alpha_2$$

$$\beta_i^*=\beta_i \quad i=1,2$$

$$\beta_{ij}^*=\beta_{ij} \quad i,j=1,2$$

$$\alpha_{11}^*=\frac{1}{2}\alpha_{11}+\frac{1}{2}\alpha_{22}+\alpha_{12}$$

$$\alpha_{22}^*=\frac{1}{2}\alpha_{11}$$

$$\alpha_{33}^{*}=\frac{1}{2}\alpha_{22}$$

$$\alpha_{12}^{*}=\alpha_{21}^{*}=-\frac{1}{2}\alpha_{11}-\frac{1}{2}\alpha_{12}$$

$$\alpha_{13}^{*}=\alpha_{31}^{*}=-\frac{1}{2}\alpha_{22}-\frac{1}{2}\alpha_{12}$$

$$\alpha_{23}^{*}=\alpha_{32}^{*}=\frac{\alpha_{12}}{2}$$

$$\chi_{11}^{*}=-\chi_{11}-\chi_{12}$$

$$\chi_{12}^{*}=\chi_{11}$$

$$\chi_{13}^{*}=\chi_{12}$$

$$\chi_{21}^{*}=-\chi_{21}-\chi_{22}$$

$$\chi_{22}^{*}=\chi_{21}$$

$$\chi_{23}^{*}=\chi_{22}$$

En este caso particular, las expresiones de las elasticidades de una de las tres variables de Output respecto a cualquiera de las dos variables de Input será igual a:

$$\frac{\frac{dy_s}{y_s}}{\frac{dx_k}{x_k}}=-\frac{\beta_k^{*}+\beta_{k1}^{*}\ln(x_1)+\beta_{k2}^{*}\ln(x_2)+\chi_{k1}^{*}\ln(y_1)+\chi_{k2}^{*}\ln(y_2)+\chi_{k3}^{*}\ln(y_3)}{\alpha_s^{*}+\alpha_{s1}^{*}\ln(y_1)+\alpha_{s2}^{*}\ln(y_2)+\alpha_{s3}^{*}\ln(y_3)+\chi_{1s}^{*}\ln(x_1)+\chi_{2s}^{*}\ln(x_2)}$$

$$\forall \quad s=1,2,3 \quad \forall \quad k=1,2$$

Por otro lado, las expresiones de las elasticidades de la variable de Output de referencia (y_1) respecto a cualquiera de las otras dos variables de Output será igual a:

$$\frac{\frac{dy_1}{y_1}}{\frac{dy_m}{y_m}} = -\frac{\alpha^*_m + \alpha^*_{m1}\ln(y_1) + \alpha^*_{m2}\ln(y_2) + \alpha^*_{m3}\ln(y_3) + \chi^*_{1m}\ln(x_1) + \chi^*_{2m}\ln(x_2)}{\alpha^*_1 + \alpha^*_{11}\ln(y_1) + \alpha^*_{12}\ln(y_2) + \alpha^*_{13}\ln(y_3) + \chi^*_{11}\ln(x_1) + \chi^*_{21}\ln(x_2)} \quad \forall\ m = 2,3$$

4.2. Función Cobb-Douglas

El caso particular del Modelo de la función distancia de carácter estocástico describimos el caso de una estimación con tres outputs y dos inputs, con una especificación funcional de una Cobb-Douglas para la relación entre inputs y outputs es la siguiente:

$$0 = \alpha^*_0 + \alpha^*_1\ln(y_1) + \alpha^*_2\ln(y_2) + \alpha^*_3\ln(y_3) + \beta^*_1\ln(x_1) + \beta^*_2\ln(x_2) + v_i - Ln(D_0)$$

Donde para estimar el modelo con las restricciones, se estimará sin restricciones el siguiente modelo:

$$\ln(y_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \alpha_2 \ln\left(\frac{y_3}{y_1}\right) + \beta_1 \ln\left(x_1\right) + \beta_2 \ln\left(x_2\right) + v_i + \ln(D_o)$$

Donde:

$$\alpha^*_0 = \alpha_0$$

$$\alpha^*_1 = -1 - \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha^*_2 = \alpha_1$$

$$\alpha^*_3 = \alpha_2$$

$$\beta^*_1 = \beta_1$$

$$\beta^*_2 = \beta_2$$

5. RECAPITULACIÓN FINAL

En este trabajo proponemos desde el punto de vista teórico el desarrollo analítico de las derivadas del modelo de la "función distancia" a partir de la transformación propuesta por Färe y otros (1993) y desarrollada por Coelli y Perelman (1996).

El modelo de la "función distancia" presenta interesantes virtudes en el ámbito de la economía aplicada, puesto que permite incluir múltiples outputs como variables explicadas en el modelo de regresión, y estudiar la sensibilidad de los mismos a las variaciones en los recursos. Las elasticidades expresan dichas relaciones o productividades marginales, cuyos cocientes posibilitan el estudio del signo y valor de las relaciones de sustitución técnica. Igualmente se puede conocer si las relaciones de transformación entre productos son positivas o negativas y cúales son los outputs más vinculados entre sí.

Una ventaja adicional de este modelo es que permite obtener las ponderaciones de los inputs y outputs a partir de los parámetros de la estimación transformados aplicando las condiciones de homogeneidad. Como se cumple que la suma de parámetros asociados a los outputs es una combinación lineal convexa será posible conocer una especie de "precio sombra" de cada variable producción. El problema es que no siempre adoptan valores positivos lo que obligaría a restringir este punto en la estimación.

En el terreno práctico, estamos desarrollando una especificación de variables para estudiar las interrelaciones entre la docencia y la investigación universitaria a través de datos de panel. En el terreno de los modelos aplicados al estudio de las actividades del sector público los modelos de la "función distancia" aportan nuevos elementos de estudio, además de servir de base de comparación de los modelos de eficiencia no parámetricos, ya que tienen la misma base económica y matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Aigner, D.; Lovell, C. K. y Schmidt, P. J. (1977): Formulation and estimation of stochastic frontier production models. Journal of Econometrics nº 6, pp. 21-37.

Batesse, G. E. y Coelli, T. J. (1992): Frontier Production Functions, technical efficiency and panel data: with application to paddy farmers in India. Journal of Productivity Analysis, nº 3, pp. 153-169.

Battese, G. E. y Corra, G. S. (1977): Estimation of a production frontier model: with application to the pastoral zone of eastern Australia. Australian Journal of Agricultural Economics, vol. 21, nº 3, pp. 169-179.

Coelli, T. y Perelman, S. (1996): A comparison of parametric and non-parametric distance functions: with application to european railways. Discussion paper del CREPP Université de Liège 96/11. CREPP: Centre de recherche en Economie Publique et en Economie de la population.

Coelli, T. y Perelman, S. (1996): Efficiency measurement, multiple-output technologies and distance functions: with application to European Railways. Discussion paper del CREPP Université de Liège 96/05.

Fare, R. S.; Grosskopf, M.; Lovell, C. A. K. y Yaisawarng, S. (1993): Derivation of Shadow Prices for Undesirable outputs: a distance function approach. *Review of Economics and Statistics*, 75. pp. 374-380.

Jondrow, J.; Lovell, C. A. K.; Materov, S. y Schmidt, P. (1977): On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model. Journal of Econometrics 19, pp. 233-238.

Kumbhakar, S. C. (1990): Production frontiers, panel data, and time-varying technical inefficiency. Journal of Econometrics, 46, pp. 201-211.

Meeusen, W. y Van Den Broeck, J. (1977): Efficiency estimation from Cobb-Douglas productions functions with composed error. *International Economic Review*, vol. 18, nº 2 june, pp. 435-444.

Simar (1992): Estimating efficiencies from frontier models with panel data: A comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping. *Journal of Productivity Analysis* nº 3, pp. 167-203.